|  |  |
| --- | --- |
|  | **Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  **высшего образования**  **«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»**  **(МГТУ им. Н.Э. Баумана)** |

**Факультет «Информатика и системы управления»**

**Кафедра «Системы обработки информации и управления»**

Домашнее задание 1

по дисциплине: «Архитектура АСОИУ»

на тему: «Теория множеств»

Выполнил:

Студент группы №21Б Цыпышев Т.А.

дата:\_\_\_\_\_\_\_\_ подпись:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Проверил:

к.т.н., доц., Г.И. Афанасьев

дата:\_\_\_\_\_\_\_\_ подпись:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. **“Показать на примерах наличие свойств у множеств”** стр. №

1.1 Свойство рефлективности 3

1.2 Свойство антисимметричности 3

1.3 Свойство транзитивности 3

1. **“Проиллюстрировать на примерах операции”**

2.1 Объединение 3

2.2 Пересечение 3

2.3 Дополнение 4

1. **“Показать на примерах правильность математических соотношений”**

3.1 Характеристическая функция объединения *А ⋃ В* 4

3.2 Характеристическая функция пересечения *А ⋂ В* 5

3.3 Характеристическая функция дополнения *A*̅ 5

1. **“Показать на примерах верность математических выражений”**

4.1 Доказательство коммутативности 6

4.2 Доказательство ассоциативности 6

4.3 Доказательство для дистрибутивности пересечения относительно объединения 7

4.5 Доказательство для дистрибутивности объединения относительно пересечения 7

4.6 Доказательство для правила де Моргана 8

4.7 Доказательства свойств универсального и пустого множества 8

1. **“Показать на примерах верность математических соотношений”**

5.1 Разность множеств 8

5.2 Симметричная разность множеств 8

5.3 Коммутативность 8

5.4 Ассоциативность 9

5.5 Дистрибутивность относительно пересечения 9

* 1. **Свойство рефлективности:**

Рефлективность является свойством, когда каждый элемент множества также является элементом самого множества. Например, множество A = {1, 2, 3} является рефлексивным, так как каждый элемент множества A (1, 2, 3) также является элементом самого множества A. Формально это записывается как A ⊆ A.

* 1. **Свойство антисимметричности:**

Антисимметричность является свойством, когда два множества A и B связаны таким образом, что если A ⊆ B и B ⊆ A, то A = B. Другими словами, если два множества содержат одинаковые элементы, то они должны быть одинаковыми. Например, множество A = {1, 2, 3} и множество B = {1, 2} связаны таким образом, что A ⊆ B и B ⊆ A. В результате, мы можем заключить, что A = B.

* 1. **Свойство транзитивности:**

Транзитивность является свойством, когда если A ⊆ B и B ⊆ C, то A ⊆ C. Другими словами, если элементы множества A также являются элементами множества B, а элементы множества B также являются элементами множества C, то элементы множества A также являются элементами множества C. Например, множество A = {1, 2} ⊆ множество B = {1, 2, 3} и множество B = {1, 2, 3} ⊆ множество C = {1, 2, 3, 4}. Тогда мы можем заключить, что множество A = {1, 2} ⊆ множество C = {1, 2, 3, 4}.

* 1. **Объединение:**

Объединение множеств A и B, обозначаемое A ⋃ B, является операцией, при которой создается новое множество, содержащее все элементы из множества A и все элементы из множества B.

Например:

Множество A = {1, 2, 3}

Множество B = {2, 3, 4}

A ⋃ B = {1, 2, 3, 4}

* 1. **Пересечение:**

Пересечение множеств A и B, обозначаемое A ⋂ B, является операцией, при которой создается новое множество, содержащее все элементы, которые присутствуют в обоих множествах A и B.

Например:

Множество A = {1, 2, 3}

Множество B = {2, 3, 4}

A ⋂ B = {2, 3}

* 1. **Дополнение:**

Дополнение множества A, обозначаемое A̅, является операцией, при которой создается новое множество, содержащее все элементы, которые не принадлежат множеству A.

Например:

Множество A = {1, 2, 3}

A̅ = {4, 5, 6, ...}

Дополнение множества A содержит все элементы, которые не присутствуют в множестве A. Обратите внимание, что дополнение множества A может быть бесконечным, так как множество всех возможных элементов может быть бесконечным.

**3.1 Доказательство соотношения** ***φА ⋃ B* = *φА  ⋁* *φB* для объединения множеств A и B:**

Для любого элемента x из объединения A ⋃ B, он может принадлежать только множеству A, только множеству B, или обоим множествам одновременно. Следовательно, для характеристической функции объединения A ⋃ B, ее значение будет равно 1 только если хотя бы одна из характеристических функций множеств A или B равна 1. Это можно записать как:

*φА ⋃ B* (x) = 1, если x ∈ A или x ∈ B

*φА ⋃ B* (x) = 0, если x ∉ A и x ∉ B

С другой стороны, для характеристической функции логического ИЛИ (⋁), ее значение будет равно 1, если хотя бы один из аргументов равен 1. Следовательно, это можно записать как:

*φА  ⋁* *φB* (x) = 1, если *φА* (x) = 1 или *φB* (x) = 1

*φА  ⋁* *φB* (x) = 0, если *φА* (x) = 0 и *φB* (x) = 0

Таким образом, можно увидеть, что *φА ⋃ B* (x) = *φА  ⋁* *φB* (x) для всех значений x. Следовательно, данное соотношение верно.

* 1. **Доказательство соотношения *φА ⋂ B* = *φА  ⋀* *φB* для пересечения множеств A и B:**

Для любого элемента x из пересечения A ⋂ B, он должен принадлежать как множеству A, так и множеству B. Следовательно, для характеристической функции пересечения A ⋂ B, ее значение будет равно 1 только если обе характеристические функции множеств A и B равны 1. Это можно записать как:

*φА ⋂ B* (x) = 1, если x ∈ A и x ∈ B

*φА ⋂ B* (x) = 0, если x ∉ A или x ∉ B

С другой стороны, для характеристической функции логического И (⋀), ее значение будет равно 1 только если оба ее аргумента равны 1. Следовательно, это можно записать как:

*φА* ⋀ *φB* (x) = 1, если *φА* (x) = 1 и *φB* (x) = 1

*φА* ⋀ *φB* (x) = 0, если *φА* (x) = 0 или *φB* (x) = 0

Таким образом, можно увидеть, что *φА* ⋂ B(x) = *φА* ⋀ *φB* (x) для всех значений x. Следовательно, данное соотношение верно.

* 1. **Доказательство соотношения *φ A*̅** **=** **⎤*φА***  **для дополнения множества A:**

Для любого элемента x из дополнения A̅, он должен не принадлежать множеству A. Следовательно, для характеристической функции дополнения A̅, ее значение будет равно 1 только если значение характеристической функции множества A равно 0. Это можно записать как:

*φ A*̅  (x) = 1, если x ∉ A

*φ A*̅  (x) = 0, если x ∈ A

С другой стороны, для логической отрицания функции (⎤), ее значение будет равно 1 только если значение аргумента равно 0, и наоборот. Следовательно, это можно записать как:

⎤*φА* (x) = 1, если *φА* (x) = 0

⎤*φА* (x) = 0, если *φА* (x) = 1

Таким образом, можно увидеть, что *φ A*̅ (x) = ⎤*φА*(x) для всех значений x. Следовательно, данное соотношение верно.

* 1. **Доказательство коммутативности:**

Коммутативность операций объединения и пересечения множеств означает, что порядок множеств не влияет на результат операции. Для доказательства коммутативности, достаточно показать, что результаты операций A ⋃ B и B ⋃ A, A ⋂ B и B ⋂ A равны.

Для объединения множеств, это можно продемонстрировать на примере:

A = {1, 2, 3}, B = {3, 4, 5}, A ⋃ B = {1, 2, 3, 4, 5}, B ⋃ A = {3, 4, 5, 1, 2, 3}

Оба результата равны, следовательно, коммутативность верна.

Для пересечения множеств, это можно продемонстрировать на примере:

A = {1, 2, 3}, B = {3, 4, 5}, A ⋂ B = {3}, B ⋂ A = {3}

Оба результата равны, следовательно, коммутативность верна.

* 1. **Доказательство ассоциативности:**

Ассоциативность операций объединения и пересечения множеств означает, что порядок выполнения операций не влияет на результат операции. Для доказательства ассоциативности, достаточно показать, что результаты операций (A ⋃ B) ⋃ C и A ⋃ (B ⋃ C), (A ⋂ B) ⋂ C и A ⋂ (B ⋂ C) равны.

Для объединения множеств, это можно продемонстрировать на примере:

A = {1, 2, 3}, B = {3, 4, 5}, C = {5, 6, 7}, (A ⋃ B) ⋃ C = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, A ⋃ (B ⋃ C) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

Оба результата равны, следовательно, ассоциативность верна.

Для пересечения множеств, это можно продемонстрировать на примере:

A = {1, 2, 3}, B = {3, 4, 5}, C = {3, 6, 7} (A ⋂ B) ⋂ C = {3} A ⋂ (B ⋂ C) = {3}

Оба результата равны, следовательно, ассоциативность верна.

* 1. **Доказательство для дистрибутивности пересечения относительно объединения:**

Пусть A = {1, 2, 3}, B = {2, 3, 4}, C = {3, 4, 5}. Тогда:

A ⋂ (B ⋃ C) = {1, 2, 3} ⋂ {2, 3, 4, 5} = {2, 3}

(A ⋂ B) ⋃ (A ⋂ C) = {1, 2, 3} ⋂ {2, 3, 4} ⋃ {1, 2, 3} ⋂ {3, 4, 5} = {2, 3}

Таким образом, мы видим, что выражения равны, что подтверждает дистрибутивность пересечения относительно объединения.

* 1. **Доказательство для дистрибутивности объединения относительно пересечения:**

Пусть A = {1, 2, 3}, B = {2, 3, 4}, C = {3, 4, 5}. Тогда:

A ⋃ (B ⋂ C) = {1, 2, 3} ⋃ {3, 4} = {1, 2, 3, 4}

(A ⋃ B) ⋂ (A ⋃ C) = {1, 2, 3, 4} ⋂ {1, 2, 3, 4, 5} = {1, 2, 3, 4}

Таким образом, мы видим, что выражения равны, что подтверждает дистрибутивность объединения относительно пересечения.

* 1. **Доказательство правила поглощения:**

Рассмотрим второе правило поглощения A ⋃ (A ⋂ B) = A:

Пусть A = {1, 2, 3} и B = {2, 3, 4}. Тогда A ⋂ B = {2, 3}.

Тогда левая часть равна A ⋃ (A ⋂ B) = {1, 2, 3} ⋃ {2, 3} = {1, 2, 3} (так как множество не содержит повторяющихся элементов). Правая часть равна A = {1, 2, 3}. Таким образом, мы видим, что левая и правая части равенства совпадают, что и требовалось доказать.

Рассмотрим второе правило поглощения A ⋂ (A ⋃ B) = A:

Пусть A = {1, 2, 3} и B = {2, 3, 4}. Тогда A ⋃ B = {1, 2, 3, 4}.

Тогда левая часть равна A ⋂ (A ⋃ B) = {1, 2, 3} ⋂ {1, 2, 3, 4} = {1, 2, 3} (так как пересечение множеств содержит только элементы, которые принадлежат обоим множествам). Правая часть равна A = {1, 2, 3}. Мы видим, что левая и правая части равенства совпадают, что и требовалось доказать.

* 1. **Доказательство для правила де Моргана:**

Закон де Моргана утверждает, что для любых множеств A и B выполняются следующие равенства ( вид ()’ обозначает операцию дополнения(2.3) ):

1. (A ∪ B)’ = A’ ∩ B’ 2. ( A ∩ B)’ = A’ ∪ B’

Например, пусть A = {1, 2, 3} и B = {2, 3, 4}. Тогда:

1. {…, 0, 5, …} = {…, 0, 4, … } ∩ {…, 1, 5, …}
2. {…, 1, 4, …} = {…, 0, 4, …} ∪ {…, 1, 5, …}
   1. **Доказательства свойств универсального и пустого множества**

Пусть A = {1, 2, 3} и E = {1, 2, 3, 4, 5}

Тогда:

* A ⋃ Ā = {1, 2, 3} ⋃ {4, 5} = E
* A ⋂ Ā = {1, 2, 3} ⋂ {4, 5} = ∅

Пусть A = {1, 2, 3} и E = ∅

Тогда:

* A ⋃ ∅ = {1, 2, 3} ⋃ ∅ = {1, 2, 3}
* A ⋃ E = {1, 2, 3} ⋃ ∅ = {1, 2, 3}

Пусть A = {1, 2, 3} и E = {1, 2, 3, 4, 5}.

Тогда:

* A ⋂ E = {1, 2, 3} ⋂ {1, 2, 3, 4, 5} = {1, 2, 3}
* A ⋂ ∅ = {1, 2, 3} ⋂ ∅ = ∅
  1. **Разность множеств:**

Если A = {1, 2, 3} и B = {2, 3, 4}, то A \ B = {1} и B̅ = {1, 4, 5, 6, ...}, тогда A ⋂ B̅ = {1}. Таким образом, мы можем убедиться, что A \ B = A ⋂ B̅.

* 1. **Симметричная разность множеств:**

Если A = {1, 2, 3} и B = {2, 3, 4}, то A \ B = {1} и B \ A = {4}, тогда A ⊕ B = {1, 4}. С другой стороны, (B \ A) ∪ (A \ B) = {1, 4}. Таким образом, мы можем убедиться, что A ⊕ B = (A \ B) ∪ (B \ A).

* 1. **Коммутативность:**

Если A = {1, 2, 3} и B = {3, 4, 5}, то A ⊕ B = {1, 2, 4, 5} и B ⊕ A = {1, 2, 4, 5}. Таким образом, мы можем убедиться, что A ⊕ B = B ⊕ A, что подтверждает коммутативность операции ⊕.

* 1. **Ассоциативность:**

Если A = {1, 2}, B = {2, 3} и C = {3, 4}, то: (A ⊕ B) ⊕ C = ({1, 2} ⊕ {2, 3}) ⊕ {3, 4} = {1, 3, 4} A ⊕ (B ⊕ C) = {1, 2} ⊕ ({2, 3} ⊕ {3, 4}) = {1, 4} Таким образом, мы можем убедиться, что (A ⊕ B) ⊕ C ≠ A ⊕ (B ⊕ C), что означает, что операция ⊕ не является ассоциативной.

* 1. **Дистрибутивность относительно пересечения:**

Если A = {1, 2, 3}, B = {2, 3, 4} и C = {3, 4, 5}, то: A ⋂ (B ⊕ C) = {1, 2, 3} ⋂ ({2, 3, 4} ⊕ {3, 4, 5}) = {1, 2} (A ⋂ B) ⊕ (A ⋂ C) = ({1, 2, 3} ⋂ {2, 3, 4}) ⊕ ({1, 2, 3} ⋂ {3, 4, 5}) = {2, 3} Таким образом, мы можем убедиться, что A ⋂ (B ⊕ C) ≠ (A ⋂ B) ⊕ (A ⋂ C), что означает, что операция ⊕ не является дистрибутивной относительно пересечения.